Zentrale Aufnahmeprüfung 2021 für die Kurzgymnasien des Kantons Zürich

Mathematik

Korrekturrichtlinien und Resultate

Allgemeine Hinweise zur Korrektur

- Es werden nur ganze Punkte verteilt.
- Der Lösungsweg muss, wo nichts anderes vermerkt ist, ersichtlich und klar dargestellt sein.
- Geometrische Konstruktionen müssen nachvollziehbar sein.
- Durchgestrichenes wird nicht bewertet.
- Sind verschiedene, darunter auch falsche Lösungen und/oder Lösungswege angegeben, ergibt dies einen Abzug von mindestens 1 Punkt.
- Um die Verhältnismässigkeit bei der Punktevergabe zu wahren, gibt es, wo nichts anderes vermerkt ist, keinen Punkteabzug bei:
  - vergessenen Einheitsangaben,
  - Rundungsfehlern (z. B. Abrunden statt Aufrunden oder Weiterrechnen mit gerundeten Zwischenresultaten) oder bei
  - fehlenden Antwortsätzen.
- Numerische Resultate sind, wo nichts anderes vermerkt ist, in beliebiger Form zu akzeptieren (beispielsweise auch ungekürzte Brüche).
- Die Vergabe von Teilpunkten bei unerwarteten Lösungswegen und Ansätzen liegt im Ermessensspielraum der Korrigierenden.

Punkteverteilung:

Nr.:	1a	1b	2a	2b	3	4a	4b	4c	5	6a	6b	7	8a	8b	9	10	11	12a	12b	Total
Alg:	2	2	2	2	3	1	1	1	2	1	1	2	1	1						22
Gm:															3	2	3	2	2	12
P_{max}:	2	2	2	2	3	1	1	1	2	1	1	2	1	1	3	2	3	2	2	34

Insgesamt: 34 Punkte

Aufgabe 1a $\boldsymbol{x = -6}$ **2 P.**

Lösungsweg:

$$\begin{aligned} 14+(-11-4x) &= 3-6(x+2) \\ 14-11-4x &= 3-6x-12 \\ 3-4x &= -9-6x \\ 2x &= -12 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Teilpunkt:

1 P. für eine korrekte klammerfreie Gleichung, d. h. zum Beispiel für $14-11-4x = 3-6x-12$

oder

1 P. für die korrekte Durchführung aller Rechen- und Umformungsschritte mit höchstens einem Fehler

Aufgabe 1b $\boldsymbol{x = \frac{4}{3} = 1.\overline{3}}$ **2 P.**

Lösungsweg:

$$
\begin{aligned}
3\cdot\left(\frac{5x}{2}-\frac{4}{3}\right) &= \frac{3x}{4}+5 \\
\frac{15x}{2}-4 &= \frac{3x}{4}+5 \qquad \Big|\cdot 4 \\
30x-16 &= 3x+20 \\
27x &= 36 \\
x &= \frac{36}{27}=\frac{4}{3}=1.\overline{3}
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
3\cdot\left(\frac{5x}{2}-\frac{4}{3}\right) &= \frac{3x}{4}+5 \\
\frac{15x}{2}-\frac{12}{3} &= \frac{3x}{4}+5 \\
\frac{90x}{12}-\frac{48}{12} &= \frac{9x}{12}+\frac{60}{12} \qquad \Big|\cdot 12 \\
90x-48 &= 9x+60 \\
81x &= 108 \\
x &= \frac{108}{81}=\frac{4}{3}=1.\overline{3}
\end{aligned}
$$

Teilpunkt:

1 P. für eine korrekte nennerfreie Gleichung,
wie z. B. für $30x-16=3x+20$

oder

1 P. für eine korrekte auf einen gemeinsamen Nenner erweiterte sowie klammerfreie Gleichung,
wie z. B. für $\frac{90x}{12}-\frac{48}{12}=\frac{9x}{12}+\frac{60}{12}$

oder

1 P. für die korrekte Durchführung aller Rechen- und Umformungsschritte mit höchstens einem Fehler

Aufgabe 2a $\mathbf{\dfrac{23x}{20} = 1.15x}$ **2 P.**

Lösungsweg:

$$\frac{3x}{4}+\frac{6x^2y}{25z}:\frac{3xy}{5z}=\frac{3x}{4}+\frac{6x^2y}{25z}\cdot\frac{5z}{3xy}=\frac{3x}{4}+\frac{2x}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{15x}{20}+\frac{8x}{20}=\frac{23x}{20}$$

oder

$$\begin{aligned}\frac{3x}{4}+\frac{6x^2y}{25z}:\frac{3xy}{5z} &=\frac{3x}{4}+\frac{6x^2y}{25z}\cdot\frac{5z}{3xy}=\frac{3x}{4}+\frac{30x^2yz}{75xyz}=\frac{225x^2yz}{300xyz}+\frac{120x^2yz}{300xyz}\\ &=\frac{345x^2yz}{300xyz}=\frac{23x}{20}\end{aligned}$$

Teilpunkt:

1 P. für den vollständig gekürzten zweiten Summanden, d. h. für $\frac{2x}{5}$

oder

1 P. für einen korrekten, gleichnamig gemachten Term, d. h. zum Beispiel für $\frac{120x^2yz}{300xyz}+\frac{225x^2yz}{300xyz}$

oder

1 P. für die korrekte Durchführung aller Rechen- und Umformungsschritte mit höchstens einem Fehler

Bemerkung:

Die volle Punktzahl wird nur vergeben, wenn das Endergebnis vollständig gekürzt ist, d. h. das Ergebnis $\frac{345x^2yz}{300xyz}$ ergibt nur 1 Punkt.

Aufgabe 2b $\mathbf{\frac{2}{5} = 0.4}$ **2 P.**

Lösungsweg:

$$\frac{\sqrt{2x}\cdot\sqrt{8x}}{\sqrt{26x^2 - x^2}}\cdot\frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{28x}} = \frac{\sqrt{16x^2}}{\sqrt{25x^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{4x}{5x}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{5}$$

oder

$$\frac{\sqrt{2x}\cdot\sqrt{8x}}{\sqrt{26x^2 - x^2}}\cdot\frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{28x}} = \frac{\sqrt{2x\cdot 8x\cdot 7x}}{\sqrt{25x^2}\cdot\sqrt{28x}} = \frac{\sqrt{112x^3}}{\sqrt{700x^3}} = \sqrt{\frac{112x^3}{700x^3}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$$

Teilpunkt:

1 P. für den korrekten wurzelfreien ersten Faktor, d. h. für $\frac{4x}{5x}$

oder

1 P. für den korrekt vereinfachten Term, der nur noch aus einer Wurzel besteht, d. h. für $\sqrt{\frac{112x^3}{700x^3}}$

oder

1 P. für die korrekte Durchführung aller Rechen- und Umformungsschritte mit höchstens einem Fehler

Bemerkungen:

- Es wird angenommen, dass $x > 0$ sei.
- Die volle Punktzahl wird nur vergeben, wenn das Endergebnis vollständig vereinfacht ist, d. h. ein Ergebnis wie z. B. $\sqrt{\frac{4}{25}}$ oder auch $\frac{4}{10}$ ergibt nur 1 Punkt.

Aufgabe 3 $\frac{3x}{5}$, $-\frac{2}{5}$, $\frac{3}{x^2}$ **3 P.**

Lösung:

$-\frac{x^2}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$5x$	
$\frac{3x}{5}$	$-\frac{6}{x}$	$\frac{15}{x}$	$\frac{3}{x^2}$

Teilpunkte:

je 1 P. pro korrekten und vollständig gekürzten Term

Bemerkung:

Die volle Punktzahl wird auch vergeben, wenn der Lösungsweg nicht ersichtlich ist.

Aufgabe 4a $\boldsymbol{x+16+x+\frac{1}{2}(x+x+16)=99}$ **1 P.**

Mögliche Lösung:

x: Anzahl Baumnüsse, die Beat gesammelt hat

$x+16+x+\frac{1}{2}(x+x+16)=99$

---

kein Teilpunkt

Bemerkungen:

- Für äquivalente und nachvollziehbare Gleichungen, wie z. B.

  $x+16+x+\frac{1}{2}(2x+16)=99$ oder $2x+16=2\cdot(99-(x+x+16))$ oder

  $x+(x+16)+(x+8)=99$, wird die volle Punktzahl vergeben.

- Wenn nur eine äquivalente, jedoch nicht nachvollziehbare Gleichung aufgeschrieben wurde, wie z. B. $3x=75$, werden 0 Punkte vergeben.

- Eine korrekte Gleichung, jedoch abhängig von einer nicht gemäss Vorgabe gewählten Variable *x* (z. B. Anzahl Baumnüsse, die Anna gesammelt hat), ergibt 0 Punkte.

Aufgabe 4b $\mathbf{18x + 13 \cdot (1680 - x) = 25\,440}$ **1 P.**

Mögliche Lösung:

x: Anzahl der verkauften Tickets für eine Bergfahrt

$18x + 13 \cdot (1680 - x) = 25\,440$

---

kein Teilpunkt

Bemerkungen:

- Für äquivalente und nachvollziehbare Gleichungen, wie z. B. $13 \cdot (1680 - x) = 25\,440 - 18x$, wird die volle Punktzahl vergeben.
- Wenn nur eine äquivalente, jedoch nicht nachvollziehbare Gleichung aufgeschrieben wurde, wie z. B. $5x = 3600$, werden 0 Punkte vergeben.
- Eine korrekte Gleichung, jedoch abhängig von einer nicht gemäss Vorgabe gewählten Variable *x* (z. B. *x:* Anzahl der verkauften Tickets für eine Talfahrt), ergibt 0 Punkte.

Aufgabe 4c $\mathbf{\frac{2}{3} \cdot (x + 140 - 50) = x + 50}$ **1 P.**

Mögliche Lösung:

x: Anzahl Rollen Toilettenpapier von Evan zu Beginn

$\frac{2}{3} \cdot (x + 140 - 50) = x + 50$

---

kein Teilpunkt

Bemerkungen:

- Für äquivalente und nachvollziehbare Gleichungen, wie z. B. $\frac{2}{3} \cdot (x + 90) = x + 50$ oder $\frac{2}{3} \cdot (x + 90) - 50 = x$, wird die volle Punktzahl vergeben.
- Wenn nur eine äquivalente, jedoch nicht nachvollziehbare Gleichung aufgeschrieben wurde, wie z. B. $\frac{1}{3}x = 10$, werden 0 Punkte vergeben.
- Eine korrekte Gleichung, jedoch abhängig von einer nicht gemäss Vorgabe gewählten Variable *x* (z. B. Anzahl Rollen Toilettenpapier von Evan am Schluss), ergibt 0 Punkte.

Aufgabe 5 **$0.05\ m^3 = 50\ l$, $0.005\ l = 5\ cm^3$, $500\ mm^3 = 0.5\ ml$** **2 P.**

Lösung:

$0.05\ m^3 = 50\ l$

$0.005\ l = 5\ cm^3$

$500\ mm^3 = 0.5\ ml$

Teilpunkt:

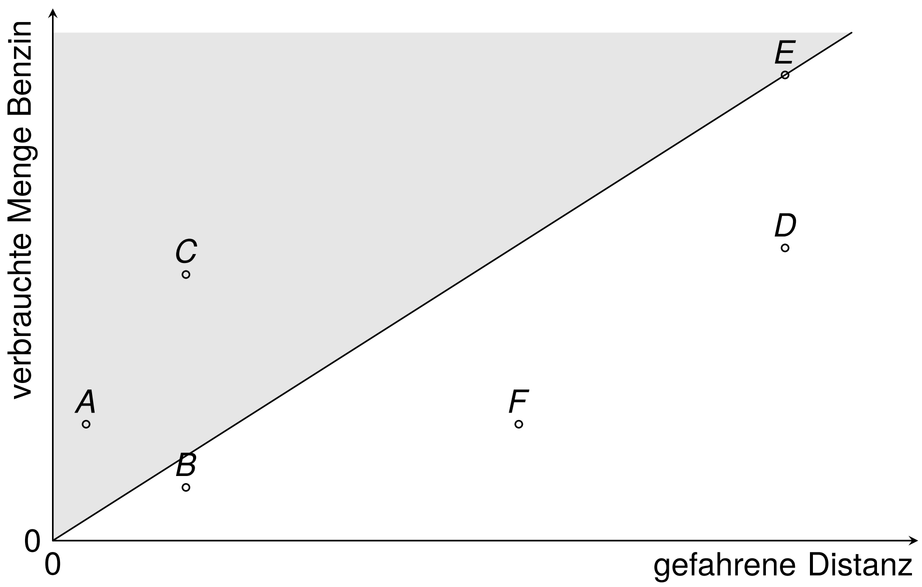
1 P. für ein korrektes Paar

Bemerkung:

Die volle Punktzahl wird auch vergeben, wenn der Lösungsweg nicht ersichtlich ist.

Aufgabe 6a **s. Abbildung** **1 P.**

Lösung:



Bemerkung zur Lösung:

Zur Lösung gehört das grau gefärbte Gebiet sowie die Gerade durch den Punkt E.

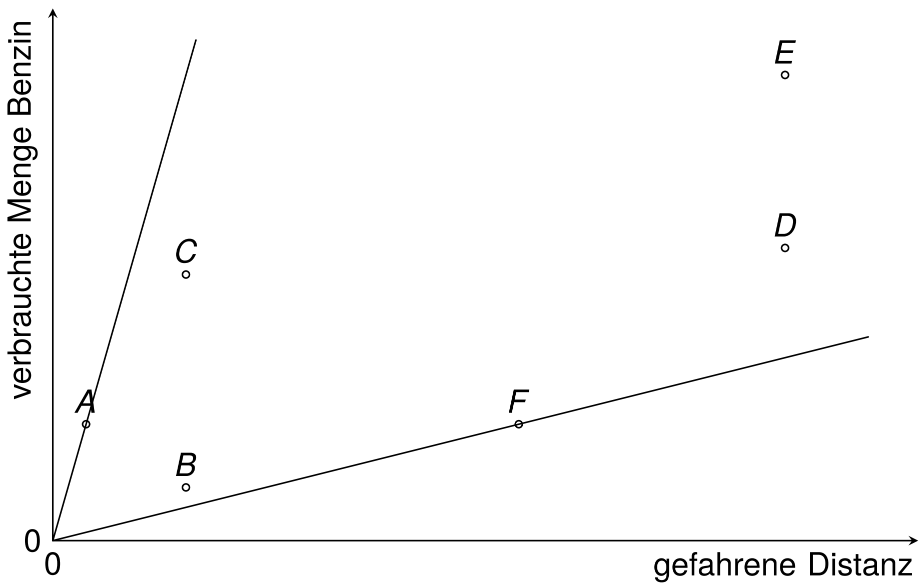
kein Teilpunkt

Bemerkungen:

- Die volle Punktzahl wird auch vergeben, wenn die Gerade nicht farbig markiert wurde.
- Die volle Punktzahl wird auch vergeben, wenn die Gerade nicht eingezeichnet, das gesuchte Gebiet jedoch klar ersichtlich ist.

Aufgabe 6b **F (am wenigsten), A (am meisten)** **1 P.**

Lösung:



Fahrzeug F hat am wenigsten Benzin verbraucht.

Fahrzeug A hat am meisten Benzin verbraucht.

kein Teilpunkt

Bemerkung:

Die volle Punktzahl wird auch vergeben, wenn die beiden Geraden nicht eingezeichnet sind.

Aufgabe 7 **5.2 l** **2 P.**

Lösung:

$100\text{ km} \mathrel{\hat{=}} 6\text{ l}$

$120\text{ km} \mathrel{\hat{=}} \frac{120 \cdot 6}{100} = 7.2\text{ l}$

Das Auto verbraucht auf 120 km 7.2 l.

Auf der Strecke BC verbraucht es 7.2 – 2 = 5.2 l.

oder

Durchschnittlicher Verbrauch pro km auf der Strecke AB: $2 : 40 = 0.05\text{ l}$

Durchschnittlicher Verbrauch pro km auf der Strecke AC: $7.2 : 120 = 0.06\text{ l}$

Durchschnittlicher Verbrauch pro km auf der Strecke BC: x

$$40 \cdot 0.05 + 80 \cdot x = 120 \cdot 0.06$$
$$2 + 80x = 7.2$$
$$80x = 5.2$$
$$x = 0.065$$
$$80 \cdot 0.065 = 5.2\text{ l}$$

Teilpunkt:

1 P. für den korrekten Verbrauch auf 120 km, d. h. für 7.2 l

oder

1 P. für die korrekte Durchführung aller Rechen- und Umformungsschritte mit höchstens einem Fehler

Aufgabe 8a **144** **1 P.**

Lösung:

Anzahl helle Pralinen insgesamt:

$100\% \mathrel{\widehat{=}} 7680$

$$2.5\% \mathrel{\widehat{=}} \frac{7680 \cdot 2.5}{100} = 192$$

Anzahl helle Pralinen ohne Nüsse:

$100\% \mathrel{\widehat{=}} 192$

$$75\% \mathrel{\widehat{=}} \frac{192 \cdot 75}{100} = 144$$

kein Teilpunkt

Aufgabe 8b **8000** **1 P.**

Lösung:

Anzahl dunkle Pralinen insgesamt:

$$70\% \triangleq 5460$$

$$100\% \triangleq \frac{5460 \cdot 100}{70} = 7800$$

Anzahl Pralinen insgesamt:

$$97.5\% \triangleq 7800$$

$$100\% \triangleq \frac{7800 \cdot 100}{97.5} = 8000$$

oder

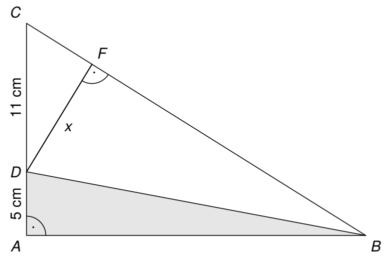
$$0.7 \cdot 0.975x = 5460$$

$$x = 8000$$

kein Teilpunkt

Aufgabe 9 **6.6 cm** **3 P.**

Lösungsweg 1:



$$A_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD}$$

$$30 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot 5$$

$$\overline{AB} = 12 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20 \text{ cm}$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96 \text{ cm}^2$$

$$A_{\Delta BCD} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta ABD}$$

$$= 96 - 30 = 66 \text{ cm}^2$$

$$A_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot x$$

$$x = \frac{2 \cdot A_{\Delta ABD}}{\overline{BC}} = \frac{2 \cdot 66}{20} = 6.6 \text{ cm}$$

oder

Lösungsweg 2 (Direkte Berechnung des Flächeninhalts des Teildreiecks BCD):

$\overline{AB} = 12 \text{ cm}$ (Berechnung s. Lösungsweg 1)

$$A_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 12 = 66 \text{ cm}^2$$

$$A_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot x$$

$$x = \frac{2 \cdot A_{\Delta ABD}}{\overline{BC}} = \frac{2 \cdot 66}{20} = 6.6 \text{ cm}$$

oder

Lösungsweg 3 (mit einer Gleichung):

$\overline{AB} = 12 \text{ cm}$ (Berechnung s. Lösungsweg 1)

$$11 \cdot 12 = 20 \cdot x$$

$$x = \frac{11 \cdot 12}{20} = 6.6 \text{ cm}$$

Teilpunkte:

1 P. für die korrekte Länge der Strecke AB, d. h. für $\overline{AB} = 12\ \text{cm}$

oder

2 P. für den korrekten Flächeninhalt des Dreiecks ABC, d. h. für $A_{\Delta ABC} = 96\ \text{cm}^2$

oder

2 P. für den korrekten Flächeninhalt des Dreiecks BCD, d. h. für $A_{\Delta BCD} = 66\ \text{cm}^2$

oder

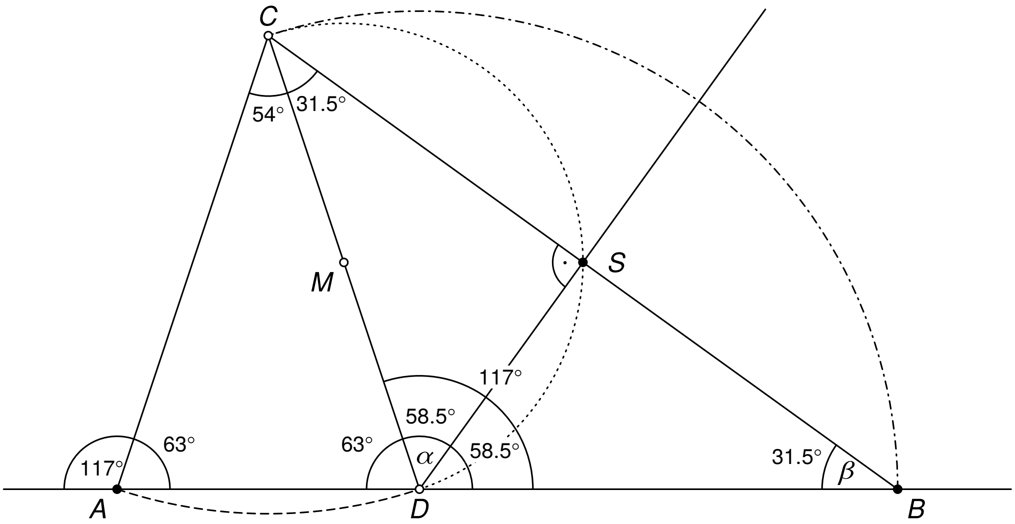
2 P. für eine korrekte Gleichung, wie z. B. $11 \cdot 12 = 20 \cdot x$ oder $\frac{11 \cdot 12}{2} = \frac{20 \cdot x}{2}$

oder

2 P. für die korrekte Durchführung aller Rechen- und Umformungsschritte mit höchstens einem Fehler

Aufgabe 10 **$\alpha = 58.5°$, $\beta = 31.5°$** **2 P.**

Lösung:



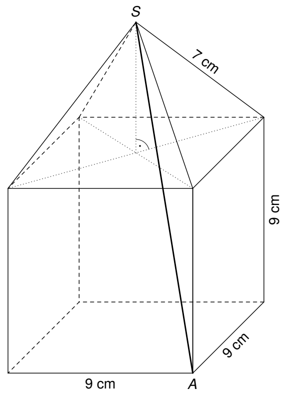
Teilpunkt:

1 P. pro korrekten Winkel α oder β

Bemerkungen:

- Wird nach einem Fehler folgerichtig weitergerechnet, werden für folgerichtige Resultate keine Punkte vergeben.
- Die Teilpunkte werden auch vergeben, wenn die Resultate nicht in die vorgegebenen Kästchen geschrieben worden sind.

Aufgabe 11 **13.51 cm** **3 P.**



k: Länge einer Pyramidenseitenkante

a: Länge einer Würfelkante

Lösungsweg 1:

$$d_{Quadrat} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2} \approx 12.728 \text{ cm}$$

$$h_{Pyramide} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{d_{Quadrat}}{2}\right)^2} = \sqrt{7^2 - 6.36^2} = \sqrt{8.5} \approx 2.915 \text{ cm}$$

$$\overline{AS} = \sqrt{\left(\frac{d_{Quadrat}}{2}\right)^2 + \left(a + h_{Pyramide}\right)^2} = \sqrt{6.364^2 + (9 + 2.915)^2} \approx 13.508 \text{ cm}$$

oder

Lösungsweg 2:

$$d_{Quadrat} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2} \approx 12.728 \text{ cm}$$

$$h_{Pyramide} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{d_{Quadrat}}{2}\right)^2} = \sqrt{7^2 - 6.36^2} = \sqrt{8.5} \approx 2.915 \text{ cm}$$

$$\overline{AS} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a + h_{Pyramide}\right)^2} = \sqrt{4.5^2 + 4.5^2 + (9 + 2.915)^2} \approx 13.508 \text{ cm}$$

oder

Lösungsweg 3:

$$h_{Seitenfläche} = \sqrt{7^2 - 4.5^2} = \sqrt{28.75} \approx 5.362 \text{ cm}$$

$$h_{Pyramide} = \sqrt{h_{Seitenfläche}^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{5.362^2 - 4.5^2} = \sqrt{8.5} \approx 2.915 \text{ cm}$$

$$\overline{AS} = \sqrt{\left(\frac{d_{Quadrat}}{2}\right)^2 + \left(a + h_{Pyramide}\right)^2} = \sqrt{6.364^2 + (9 + 2.915)^2} \approx 13.508 \text{ cm}$$

Teilpunkte:

1 P. für die korrekte Berechnung einer der folgenden Strecken:

$d_{Quadrat} = \sqrt{162} \approx 12.728 \text{ cm}$ *oder* $\frac{d_{Quadrat}}{2} = \sqrt{40.5} \approx 6.364 \text{ cm}$ *oder*

$h_{Seitenfläche} = \sqrt{28.75} \approx 5.362 \text{ cm}$

oder

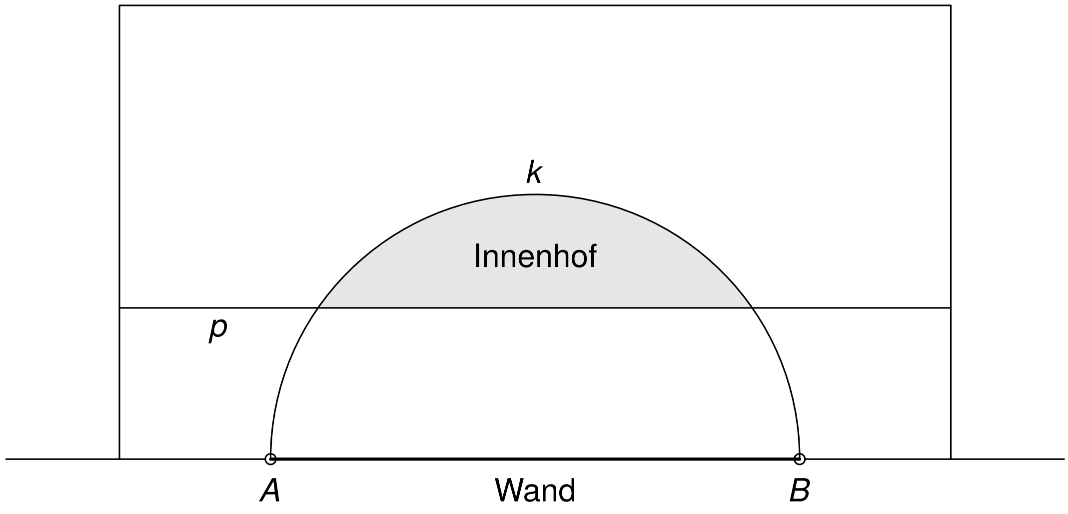
2 P. für die korrekte Berechnung der Pyramidenhöhe, d. h. für $h_{Pyramide} \approx 2.915 \text{ cm}$

oder

2 P. für die korrekte Durchführung aller Rechen- und Umformungsschritte mit höchstens einem Fehler

Aufgabe 12a **s. Abbildung** **2 P.**

Lösung:



Bemerkungen zur Lösung:

- Genau genommen gehört die Kreislinie nicht zur Lösung. Bei der Korrektur wird dieser Aspekt jedoch nicht mitberücksichtigt.
- Die Kreissehne gehört zur Lösung. Bei der Korrektur wird dieser Aspekt jedoch nicht mitberücksichtigt.

Teilpunkt:

1 P. für die korrekte Gerade p sowie den korrekten Kreis k (ohne eingefärbtes Gebiet)

oder

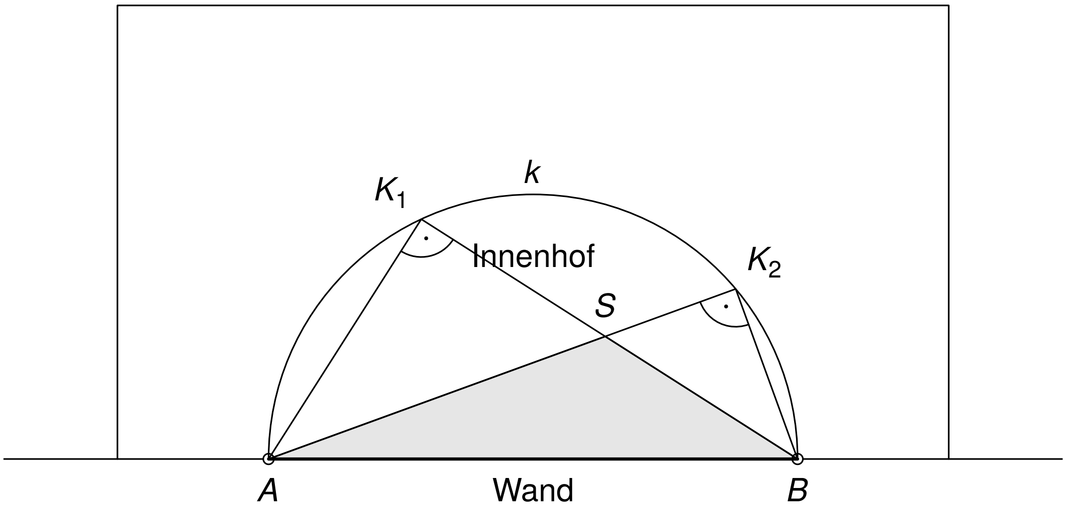
1 P. für eine Parallele p zu AB im falschen Abstand, sowie einem folgerichtig korrekt eingefärbten Gebiet

Bemerkungen:

- Die Punkte werden auch vergeben, wenn der Kreismittelpunkt nicht konstruiert, sondern abgemessen wurde.
- Wird die Parallele so falsch konstruiert, dass sie den Kreis nicht schneidet, oder liegt die Parallele auf AB, ergibt dies 0 Punkte.

Aufgabe 12b **s. Abbildung** **2 P.**

Lösung:



Teilpunkt:

je 1 P. pro korrekt konstruierten Kamerastandort

Bemerkungen:

- Die Punkte werden nur vergeben, wenn der Thaleskreis ersichtlich ist.
- Die Punkte werden auch vergeben, wenn der Kreismittelpunkt nicht konstruiert, sondern abgemessen wurde.