

Zentrale Aufnahmeprüfung 2021 für die Kurzgymnasien des Kantons Zürich

Mathematik

Korrekturrichtlinien und Resultate

Allgemeine Hinweise zur Korrektur

- Es werden nur ganze Punkte verteilt.
- Der Lösungsweg muss, wo nichts anderes vermerkt ist, ersichtlich und klar dargestellt sein.
- Geometrische Konstruktionen müssen nachvollziehbar sein.
- Durchgestrichenes wird nicht bewertet.
- Sind verschiedene, darunter auch falsche Lösungen und/oder Lösungswege angegeben, ergibt dies einen Abzug von mindestens 1 Punkt.
- Um die Verhältnismässigkeit bei der Punktevergabe zu wahren, gibt es, wo nichts anderes vermerkt ist, keinen Punkteabzug bei:
 - vergessenen Einheitsangaben,
 - Rundungsfehlern (z. B. Abrunden statt Aufrunden oder Weiterrechnen mit gerundeten Zwischenresultaten) oder bei
 - fehlenden Antwortsätzen.
- Numerische Resultate sind, wo nichts anderes vermerkt ist, in beliebiger Form zu akzeptieren (beispielsweise auch ungekürzte Brüche).
- Die Vergabe von Teilpunkten bei unerwarteten Lösungswegen und Ansätzen liegt im Ermessensspielraum der Korrigierenden.

Punkteverteilung:

Nr.:	1a	1b	2a	2b	3	4a	4b	4c	5	6a	6b	7	8a	8b	9	10	11	12a	12b	Total
Alg:	2	2	2	2	3	1	1	1	2	1	1	2	1	1						22
Gm:															3	2	3	2	2	12
P _{max} :	2	2	2	2	3	1	1	1	2	1	1	2	1	1	3	2	3	2	2	34

Insgesamt: 34 Punkte

Aufgabe 1a

$x = -6$

2 P.

Lösungsweg:

$$14 + (-11 - 4x) = 3 - 6(x + 2)$$

$$14 - 11 - 4x = 3 - 6x - 12$$

$$3 - 4x = -9 - 6x$$

$$2x = -12$$

$$x = -6$$

Teilpunkt:

- 1 P. für eine korrekte klammerfreie Gleichung, d. h. zum Beispiel für
 $14 - 11 - 4x = 3 - 6x - 12$

oder

- 1 P. für die korrekte Durchführung aller Rechen- und Umformungsschritte mit höchstens einem Fehler

Aufgabe 1b

$$x = \frac{4}{3} = 1.\bar{3}$$

2 P.*Lösungsweg:*

$$3 \cdot \left(\frac{5x}{2} - \frac{4}{3} \right) = \frac{3x}{4} + 5$$

$$\frac{15x}{2} - 4 = \frac{3x}{4} + 5 \quad | \cdot 4$$

$$30x - 16 = 3x + 20$$

$$27x = 36$$

$$x = \frac{36}{27} = \frac{4}{3} = 1.\bar{3}$$

oder

$$3 \cdot \left(\frac{5x}{2} - \frac{4}{3} \right) = \frac{3x}{4} + 5$$

$$\frac{15x}{2} - \frac{12}{3} = \frac{3x}{4} + 5$$

$$\frac{90x}{12} - \frac{48}{12} = \frac{9x}{12} + \frac{60}{12} \quad | \cdot 12$$

$$90x - 48 = 9x + 60$$

$$81x = 108$$

$$x = \frac{108}{81} = \frac{4}{3} = 1.\bar{3}$$

Teilpunkt:

- 1 P. für eine korrekte nennerfreie Gleichung,
wie z. B. für $30x - 16 = 3x + 20$

oder

- 1 P. für eine korrekte auf einen gemeinsamen Nenner erweiterte sowie
klammerfreie Gleichung,

wie z. B. für $\frac{90x}{12} - \frac{48}{12} = \frac{9x}{12} + \frac{60}{12}$

oder

- 1 P. für die korrekte Durchführung aller Rechen- und Umformungsschritte mit
höchstens einem Fehler

Aufgabe 2a

$$\frac{23x}{20} = 1.15x$$

2 P.*Lösungsweg:*

$$\frac{3x}{4} + \frac{6x^2y}{25z} : \frac{3xy}{5z} = \frac{3x}{4} + \frac{6x^2y}{25z} \cdot \frac{5z}{3xy} = \frac{3x}{4} + \frac{2x}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{15x}{20} + \frac{8x}{20} = \frac{23x}{20}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{3x}{4} + \frac{6x^2y}{25z} : \frac{3xy}{5z} &= \frac{3x}{4} + \frac{6x^2y}{25z} \cdot \frac{5z}{3xy} = \frac{3x}{4} + \frac{30x^2yz}{75xyz} = \frac{225x^2yz}{300xyz} + \frac{120x^2yz}{300xyz} \\ &= \frac{345x^2yz}{300xyz} = \frac{23x}{20} \end{aligned}$$

Teilpunkt:

1 P. für den vollständig gekürzten zweiten Summanden, d. h. für $\frac{2x}{5}$

oder

1 P. für einen korrekten, gleichnamig gemachten Term, d. h. zum Beispiel für $\frac{120x^2yz}{300xyz} + \frac{225x^2yz}{300xyz}$

oder

1 P. für die korrekte Durchführung aller Rechen- und Umformungsschritte mit höchstens einem Fehler

Bemerkung:

Die volle Punktzahl wird nur vergeben, wenn das Endergebnis vollständig gekürzt ist,

d. h. das Ergebnis $\frac{345x^2yz}{300xyz}$ ergibt nur 1 Punkt.

Aufgabe 2b

$$\frac{2}{5} = 0.4$$

2 P.*Lösungsweg:*

$$\frac{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{8x}}{\sqrt{26x^2 - x^2}} \cdot \frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{28x}} = \frac{\sqrt{16x^2}}{\sqrt{25x^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{4x}{5x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$$

oder

$$\frac{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{8x}}{\sqrt{26x^2 - x^2}} \cdot \frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{28x}} = \frac{\sqrt{2x \cdot 8x \cdot 7x}}{\sqrt{25x^2 \cdot 28x}} = \frac{\sqrt{112x^3}}{\sqrt{700x^3}} = \sqrt{\frac{112x^3}{700x^3}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$$

Teilpunkt:

1 P. für den korrekten wurzelfreien ersten Faktor, d. h. für $\frac{4x}{5x}$

oder

1 P. für den korrekt vereinfachten Term, der nur noch aus einer Wurzel besteht,
d. h. für $\sqrt{\frac{112x^3}{700x^3}}$

oder

1 P. für die korrekte Durchführung aller Rechen- und Umformungsschritte mit höchstens einem Fehler

Bemerkungen:

- Es wird angenommen, dass $x > 0$ sei.
- Die volle Punktzahl wird nur vergeben, wenn das Endergebnis vollständig vereinfacht ist, d. h. ein Ergebnis wie z. B. $\sqrt{\frac{4}{25}}$ oder auch $\frac{4}{10}$ ergibt nur

1 Punkt.

Aufgabe 3

$$\frac{3x}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{3}{x^2}$$

3 P.*Lösung:*

	$-\frac{x^2}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$5x$	
$\frac{3x}{5}$	$-\frac{6}{x}$	$\frac{15}{x}$	$\frac{3}{x^2}$	

Teilpunkte:

je 1 P. pro korrekten und vollständig gekürzten Term

Bemerkung:

Die volle Punktzahl wird auch vergeben, wenn der Lösungsweg nicht ersichtlich ist.

Aufgabe 4a

$$x + 16 + x + \frac{1}{2}(x + x + 16) = 99$$

1 P.

Mögliche Lösung:

x : Anzahl Baumnüsse, die Beat gesammelt hat

$$x + 16 + x + \frac{1}{2}(x + x + 16) = 99$$

kein Teilpunkt

Bemerkungen:

- Für äquivalente und nachvollziehbare Gleichungen, wie z. B.
 $x + 16 + x + \frac{1}{2}(2x + 16) = 99$ oder $2x + 16 = 2 \cdot (99 - (x + x + 16))$ oder
 $x + (x + 16) + (x + 8) = 99$, wird die volle Punktzahl vergeben.
- Wenn nur eine äquivalente, jedoch nicht nachvollziehbare Gleichung aufgeschrieben wurde, wie z. B. $3x = 75$, werden 0 Punkte vergeben.
- Eine korrekte Gleichung, jedoch abhängig von einer nicht gemäss Vorgabe gewählten Variable x (z. B. Anzahl Baumnüsse, die Anna gesammelt hat), ergibt 0 Punkte.

Aufgabe 4b

$$18x + 13 \cdot (1680 - x) = 25440$$

1 P.

Mögliche Lösung:

x: Anzahl der verkauften Tickets für eine Bergfahrt

$$18x + 13 \cdot (1680 - x) = 25440$$

kein Teilpunkt

Bemerkungen:

- Für äquivalente und nachvollziehbare Gleichungen, wie z. B. $13 \cdot (1680 - x) = 25440 - 18x$, wird die volle Punktzahl vergeben.
- Wenn nur eine äquivalente, jedoch nicht nachvollziehbare Gleichung aufgeschrieben wurde, wie z. B. $5x = 3600$, werden 0 Punkte vergeben.
- Eine korrekte Gleichung, jedoch abhängig von einer nicht gemäss Vorgabe gewählten Variable x (z. B. x: Anzahl der verkauften Tickets für eine Talfahrt), ergibt 0 Punkte.

Aufgabe 4c

$$\frac{2}{3} \cdot (x + 140 - 50) = x + 50$$

1 P.

Mögliche Lösung:

x : Anzahl Rollen Toilettenpapier von Evan zu Beginn

$$\frac{2}{3} \cdot (x + 140 - 50) = x + 50$$

kein Teilpunkt

Bemerkungen:

- Für äquivalente und nachvollziehbare Gleichungen, wie z. B. $\frac{2}{3} \cdot (x + 90) = x + 50$ oder $\frac{2}{3} \cdot (x + 90) - 50 = x$, wird die volle Punktzahl vergeben.
- Wenn nur eine äquivalente, jedoch nicht nachvollziehbare Gleichung aufgeschrieben wurde, wie z. B. $\frac{1}{3}x = 10$, werden 0 Punkte vergeben.
- Eine korrekte Gleichung, jedoch abhängig von einer nicht gemäss Vorgabe gewählten Variable x (z. B. Anzahl Rollen Toilettenpapier von Evan am Schluss), ergibt 0 Punkte.

Aufgabe 5 **$0.05 \text{ m}^3 = 50 \text{ l}$, $0.005 \text{ l} = 5 \text{ cm}^3$, $500 \text{ mm}^3 = 0.5 \text{ ml}$** **2 P.**

Lösung:

$$0.05 \text{ m}^3 = 50 \text{ l}$$

$$0.005 \text{ l} = 5 \text{ cm}^3$$

$$500 \text{ mm}^3 = 0.5 \text{ ml}$$

Teilpunkt:

1 P. für ein korrektes Paar

Bemerkung:

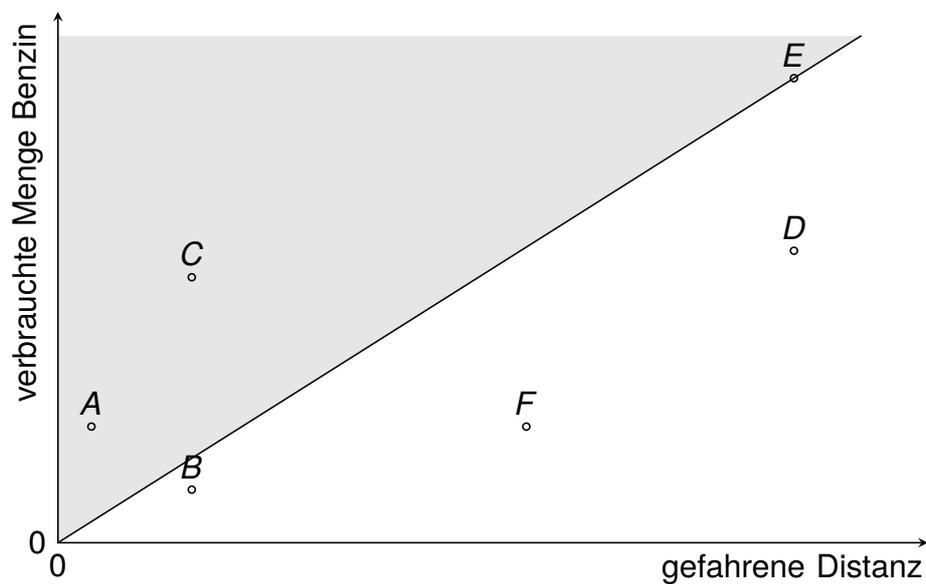
Die volle Punktzahl wird auch vergeben, wenn der Lösungsweg nicht ersichtlich ist.

Aufgabe 6a

s. Abbildung

1 P.

Lösung:



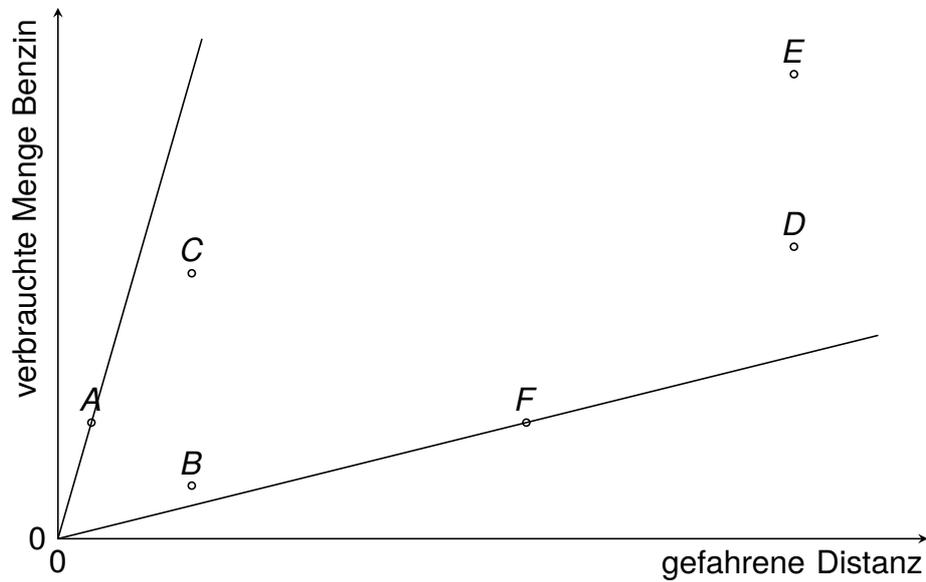
Bemerkung zur Lösung:

Zur Lösung gehört das grau gefärbte Gebiet sowie die Gerade durch den Punkt E.

kein Teilpunkt

Bemerkungen:

- Die volle Punktzahl wird auch vergeben, wenn die Gerade nicht farblich markiert wurde.
- Die volle Punktzahl wird auch vergeben, wenn die Gerade nicht eingezeichnet, das gesuchte Gebiet jedoch klar ersichtlich ist.

Aufgabe 6b**F (am wenigsten), A (am meisten)****1 P.***Lösung:*

Fahrzeug F hat am wenigsten Benzin verbraucht.

Fahrzeug A hat am meisten Benzin verbraucht.

kein Teilpunkt

Bemerkung:

Die volle Punktzahl wird auch vergeben, wenn die beiden Geraden nicht eingezeichnet sind.

Aufgabe 7**5.2 I****2 P.***Lösung:*

$$100 \text{ km} \hat{=} 6 \text{ l}$$

$$120 \text{ km} \hat{=} \frac{120 \cdot 6}{100} = 7.2 \text{ l}$$

Das Auto verbraucht auf 120 km 7.2 l.

Auf der Strecke BC verbraucht es $7.2 - 2 = 5.2$ l.

oder

$$\text{Durchschnittlicher Verbrauch pro km auf der Strecke AB: } 2 : 40 = 0.05 \text{ l}$$

$$\text{Durchschnittlicher Verbrauch pro km auf der Strecke AC: } 7.2 : 120 = 0.06 \text{ l}$$

$$\text{Durchschnittlicher Verbrauch pro km auf der Strecke BC: } x$$

$$40 \cdot 0.05 + 80 \cdot x = 120 \cdot 0.06$$

$$2 + 80x = 7.2$$

$$80x = 5.2$$

$$x = 0.065$$

$$80 \cdot 0.065 = 5.2 \text{ l}$$

Teilpunkt:

1 P. für den korrekten Verbrauch auf 120 km, d. h. für 7.2 l

oder

1 P. für die korrekte Durchführung aller Rechen- und Umformungsschritte mit höchstens einem Fehler

Aufgabe 8a**144****1 P.**

Lösung:

Anzahl helle Pralinen insgesamt:

$$100\% \hat{=} 7680$$

$$2.5\% \hat{=} \frac{7680 \cdot 2.5}{100} = 192$$

Anzahl helle Pralinen ohne Nüsse:

$$100\% \hat{=} 192$$

$$75\% \hat{=} \frac{192 \cdot 75}{100} = 144$$

kein Teilpunkt

Aufgabe 8b**8000****1 P.**

Lösung:

Anzahl dunkle Pralinen insgesamt:

$$70\% \hat{=} 5460$$

$$100\% \hat{=} \frac{5460 \cdot 100}{70} = 7800$$

Anzahl Pralinen insgesamt:

$$97.5\% \hat{=} 7800$$

$$100\% \hat{=} \frac{7800 \cdot 100}{97.5} = 8000$$

oder

$$0.7 \cdot 0.975x = 5460$$

$$x = 8000$$

kein Teilpunkt

Aufgabe 9**6.6 cm****3 P.**

Lösungsweg 1:

$$A_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD}$$

$$30 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot 5$$

$$\overline{AB} = 12 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20 \text{ cm}$$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96 \text{ cm}^2$$

$$A_{\triangle BCD} = A_{\triangle ABC} - A_{\triangle ABD}$$

$$= 96 - 30 = 66 \text{ cm}^2$$

$$A_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot x$$

$$x = \frac{2 \cdot A_{\triangle BCD}}{\overline{BC}} = \frac{2 \cdot 66}{20} = 6.6 \text{ cm}$$

oder

Lösungsweg 2 (Direkte Berechnung des Flächeninhalts des Teildreiecks BCD):

$$\overline{AB} = 12 \text{ cm} \quad (\text{Berechnung s. Lösungsweg 1})$$

$$A_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 12 = 66 \text{ cm}^2$$

$$A_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot x$$

$$x = \frac{2 \cdot A_{\triangle BCD}}{\overline{BC}} = \frac{2 \cdot 66}{20} = 6.6 \text{ cm}$$

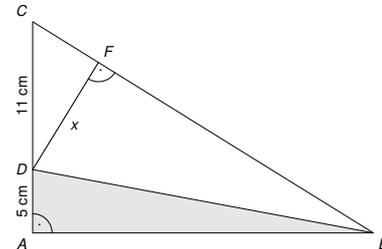
oder

Lösungsweg 3 (mit einer Gleichung):

$$\overline{AB} = 12 \text{ cm} \quad (\text{Berechnung s. Lösungsweg 1})$$

$$11 \cdot 12 = 20 \cdot x$$

$$x = \frac{11 \cdot 12}{20} = 6.6 \text{ cm}$$



Teilpunkte:

1 P. für die korrekte Länge der Strecke AB, d. h. für $\overline{AB} = 12 \text{ cm}$

oder

2 P. für den korrekten Flächeninhalt des Dreiecks ABC, d. h. für $A_{\triangle ABC} = 96 \text{ cm}^2$

oder

2 P. für den korrekten Flächeninhalt des Dreiecks BCD, d. h. für $A_{\triangle BCD} = 66 \text{ cm}^2$

oder

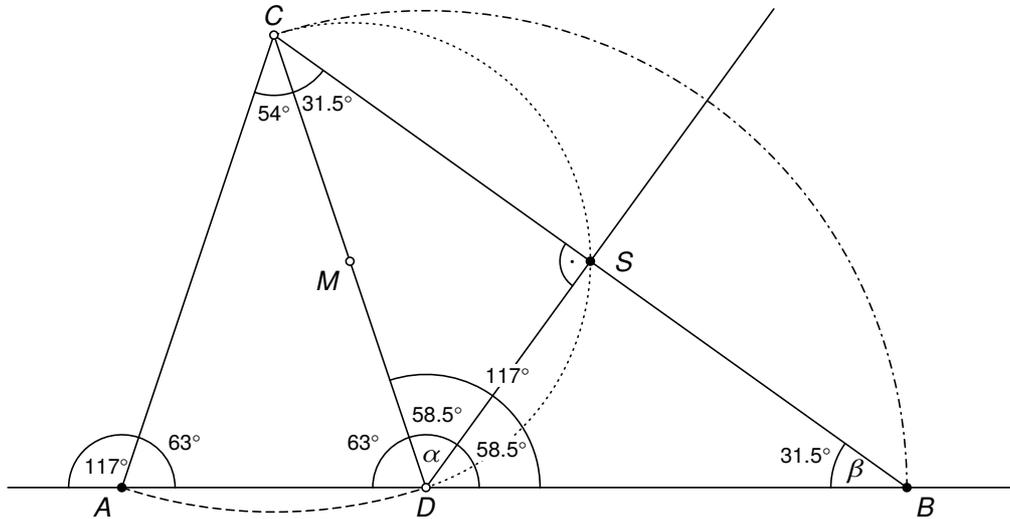
2 P. für eine korrekte Gleichung, wie z. B. $11 \cdot 12 = 20 \cdot x$ oder $\frac{11 \cdot 12}{2} = \frac{20 \cdot x}{2}$

oder

2 P. für die korrekte Durchführung aller Rechen- und Umformungsschritte mit höchstens einem Fehler

Aufgabe 10

$\alpha = 58.5^\circ, \beta = 31.5^\circ$

2 P.*Lösung:**Teilpunkt:*1 P. pro korrekten Winkel α oder β *Bemerkungen:*

- Wird nach einem Fehler folgerichtig weitergerechnet, werden für folgerichtige Resultate keine Punkte vergeben.
- Die Teilpunkte werden auch vergeben, wenn die Resultate nicht in die vorgegebenen Kästchen geschrieben worden sind.

Aufgabe 11**13.51 cm****3 P.**

k : Länge einer Pyramidenseitenkante

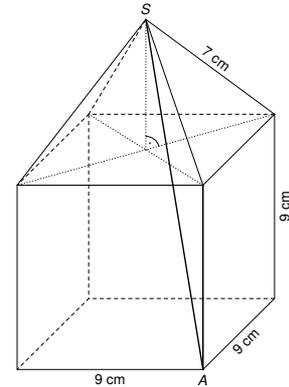
a : Länge einer Würfelkante

Lösungsweg 1:

$$d_{\text{Quadrat}} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2} \approx 12.728 \text{ cm}$$

$$h_{\text{Pyramide}} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{d_{\text{Quadrat}}}{2}\right)^2} = \sqrt{7^2 - 6.36^2} = \sqrt{8.5} \approx 2.915 \text{ cm}$$

$$\overline{AS} = \sqrt{\left(\frac{d_{\text{Quadrat}}}{2}\right)^2 + (a + h_{\text{Pyramide}})^2} = \sqrt{6.364^2 + (9 + 2.915)^2} \approx 13.508 \text{ cm}$$



oder

Lösungsweg 2:

$$d_{\text{Quadrat}} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2} \approx 12.728 \text{ cm}$$

$$h_{\text{Pyramide}} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{d_{\text{Quadrat}}}{2}\right)^2} = \sqrt{7^2 - 6.36^2} = \sqrt{8.5} \approx 2.915 \text{ cm}$$

$$\overline{AS} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a + h_{\text{Pyramide}})^2} = \sqrt{4.5^2 + 4.5^2 + (9 + 2.915)^2} \approx 13.508 \text{ cm}$$

oder

Lösungsweg 3:

$$h_{\text{Seitenfläche}} = \sqrt{7^2 - 4.5^2} = \sqrt{28.75} \approx 5.362 \text{ cm}$$

$$h_{\text{Pyramide}} = \sqrt{h_{\text{Seitenfläche}}^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{5.362^2 - 4.5^2} = \sqrt{8.5} \approx 2.915 \text{ cm}$$

$$\overline{AS} = \sqrt{\left(\frac{d_{\text{Quadrat}}}{2}\right)^2 + (a + h_{\text{Pyramide}})^2} = \sqrt{6.364^2 + (9 + 2.915)^2} \approx 13.508 \text{ cm}$$

Teilpunkte:

1 P. für die korrekte Berechnung einer der folgenden Strecken:

$$d_{\text{Quadrat}} = \sqrt{162} \approx 12.728 \text{ cm} \quad \text{oder} \quad \frac{d_{\text{Quadrat}}}{2} = \sqrt{40.5} \approx 6.364 \text{ cm} \quad \text{oder}$$

$$h_{\text{Seitenfläche}} = \sqrt{28.75} \approx 5.362 \text{ cm}$$

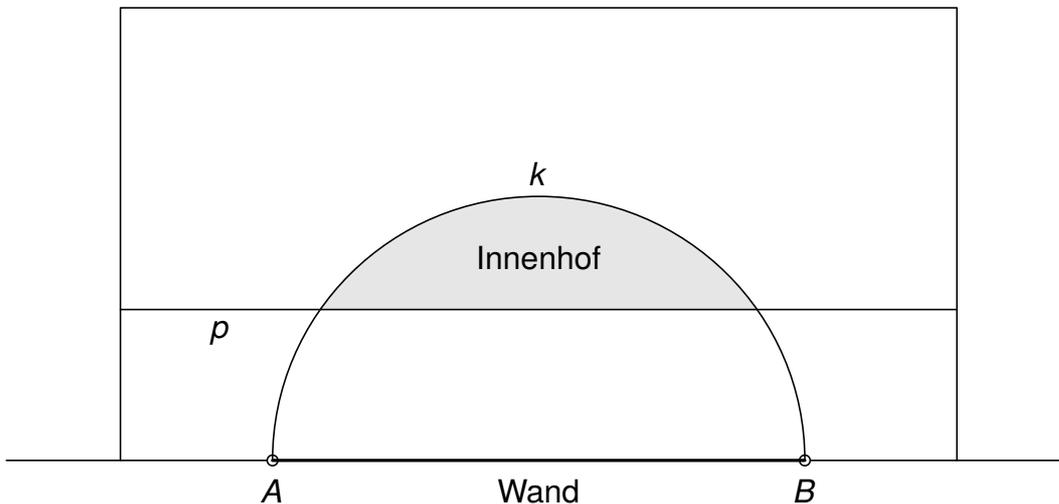
oder

2 P. für die korrekte Berechnung der Pyramidenhöhe, d. h. für

$$h_{\text{Pyramide}} \approx 2.915 \text{ cm}$$

oder

2 P. für die korrekte Durchführung aller Rechen- und Umformungsschritte mit höchstens einem Fehler

Aufgabe 12a**s. Abbildung****2 P.***Lösung:**Bemerkungen zur Lösung:*

- Genau genommen gehört die Kreislinie nicht zur Lösung. Bei der Korrektur wird dieser Aspekt jedoch nicht mitberücksichtigt.
- Die Kreissehne gehört zur Lösung. Bei der Korrektur wird dieser Aspekt jedoch nicht mitberücksichtigt.

Teilpunkt:

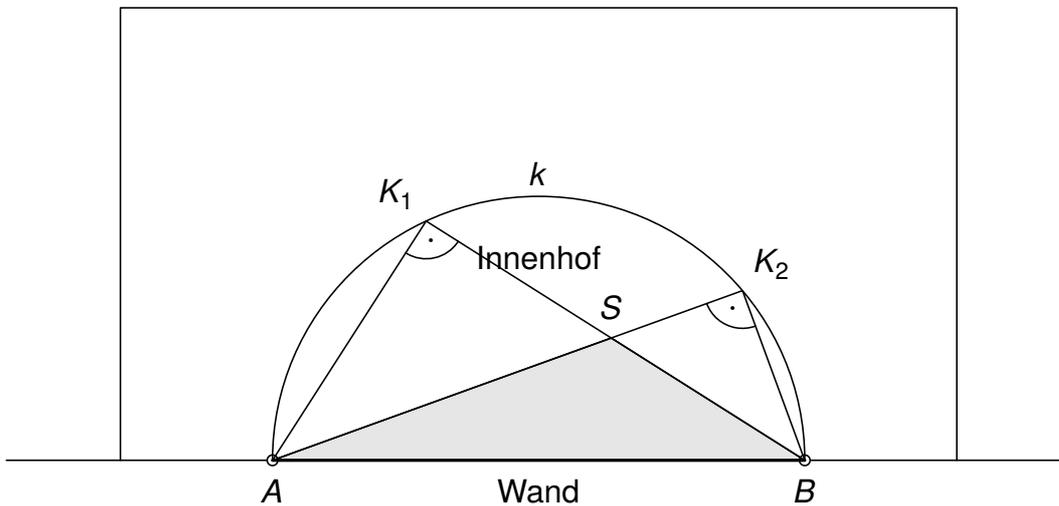
1 P. für die korrekte Gerade p sowie den korrekten Kreis k
(ohne eingefärbtes Gebiet)

oder

1 P. für eine Parallele p zu AB im falschen Abstand, sowie einem folgerichtig
korrekt eingefärbten Gebiet

Bemerkungen:

- Die Punkte werden auch vergeben, wenn der Kreismittelpunkt nicht konstruiert, sondern abgemessen wurde.
- Wird die Parallele so falsch konstruiert, dass sie den Kreis nicht schneidet, oder liegt die Parallele auf AB , ergibt dies 0 Punkte.

Aufgabe 12b**s. Abbildung****2 P.***Lösung:**Teilpunkt:*

je 1 P. pro korrekt konstruierten Kamerastandort

Bemerkungen:

- Die Punkte werden nur vergeben, wenn der Thaleskreis ersichtlich ist.
- Die Punkte werden auch vergeben, wenn der Kreismittelpunkt nicht konstruiert, sondern abgemessen wurde.